ISSN: 1991-8941

الطريقة الجدولية المطورة لحل التكاملات الرياضية

فراس شاكر فندي
قسم الرياضيات - كلية التربية – جامعة الانبار

تاريخ الاستلام:2007/3/8 تاريخ القبول:2007/9/10

الخلاصة

قـد تـم وضع جدول مطور في حل جميع التكاملات التي تحل بطريقة التجزئة وكذلك بعض التكاملات التي تحل بالطرق الأخـرى وهذا الجدول هو طريقة مختصرة في حل هذه التكاملات حيث نحتاج الى جهد ووقت اقل من الطرق الأخرى في إيجـاد الـناتج . كذلك فان هذا الجدول يقلل نسبة الخطأ في إيجاد ناتج التكامل ،وقد تضمن المبحث الأول توضيح طريقة التجـزئة الاعتـيادية وكيفية إيجاد ناتج التكامل بهذه الطريقة ،أما المبحث الثاني فقد تناول توضيح الطريقة الجدولية في إيجاد ناتج التكامل حيث تستخدم الطريقة الجدولية عندما يكون التكامل لحاصل ضرب دالتين إحداهما متعددة حدود ،أما المـبحث الـثالث فقد تم تطوير الطريقة الجدولية وتعميمها في حل جميع التكاملات التي تحل بطريقة التجزئة وذلك عن طـريق استخدام الجدول المطور حيث أن هذا الجدول هو طريقة سهلة وبسيطة في حل التكاملات وكذلك بأقل نسبة خطا ممكـنة .ويحـتوي المبحث الرابع على استخدام الجدول المطور في بعض حل تكاملات الدوال المثلثية حيث يمكن إيجاد ناتج هذه التكاملات بطريقة اسهل أتسرع نسبيا من الطريقة المباشرة الاعتيادية .

كلمات مفتاحية: الطريقة الجدولية ، حل التكاملات الرياضية

المقدمة : ـ

إن مـن إحـدى طرق التكامل هي طريقة التجزئة وقـد قمنا في هذا البحث بتطوير الطريقة الجدولية التي تتضمن استخدام جدول لحل التكامل الذي هو عبارة عن حاصـل ضـرب دالتين بشرط أن تكون إحداهما متعددة حدود والثانية تكون قابلة للتكامل.

حـيث اسـتطعنا القـيام بتطويـر هذا الجدول إذ يمكن استخدام الجدول المطور في حل كل التكاملات التي تحل بطـريقة التجـزئة وبدون الرجوع إلى طريقة التجزئة الاعتيادية .

إن هـذا التطويـر فـي الطريقة الجدولية سوف يوفر للطالـب الجهد والوقت الكثير في حل التكامل الذي يحل بطريقة التجزئة وخصوصا عندما يكون ناتج التكامل هو مـسألة ثانوية كما في المعادلات التفاضلية وكذلك في بعض التطبيقات الهندسية وخاصة الهندسة الكهربائية .

وقـد اعـتمدنا في عرض المبحث الأول والثاني على المتوفر من المصادر المكتبية .

طريقة التجزئة الاعتيادية

إن هذه الطريقة تعتمد على اشتقاق حاصل ضرب دالتين فإذا كان كل من v،u دالة قابلة للاشتقاق فان

$$d(uv) = udv + vdu \text{ ------------ } (1)$$

وبذلك فان

$$udv = d(uv) - vdu \text{ ------------ } (2)$$

وبأخذ التكامل في طرفي المعادلة (2) مع ملاحظة أن $\int d(uv) = uv$ نحصل على قانون التكامل بالأجزاء وهو

$$\int udv = uv - \int vdu$$

إن هذا القانون يعبر عن التكامل $\int udv$ بدلالة التكامل $\int vdu$ الذي يفترض أن يكون ابسط صيغة من التكامل الأول ، تستخدم هذه الطريقة في تكامل بعض الدوال بالاختيار المناسب لـ u، dv بحيث انه لو أخذت مشتقة u وتكامل dv كان التكامل $\int vdu$ ابسط من التكامل الأصلي $\int udv$ وسوف نوضح الطريقة بالأمثلة الآتية.

مثال 1 :- جد ناتج التكامل $\int x^2e^xdx$

الحل :-

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$$
$$dv = e^xdx \rightarrow v = e^x$$

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx$$
$$u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = e^xdx \rightarrow v = e^x$$

$$\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx$$
$$= xe^x - e^x + c$$
$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

مثال :- جد ناتج التكامل $\int e^x \sin x\, dx$

الحل :-

$$u = \sin x \rightarrow dx = \cos x\, dx$$
$$dv = e^xdx \rightarrow v = e^x$$
$$\int e^x\sin x\, dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\, dx \quad \ldots\ldots(1)$$
$$u= \cos x \rightarrow du= - \sin x\, dx$$
$$dv= e^xdx \rightarrow v = e^x$$
$$\int e^x\cos x\, dx = e^x\cos x + \int e^x\sin x\, dx \quad \ldots\ldots(2)$$

وبتعويض (2) في (1) نحصل على

$$\int e^x\sin x\, dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\, dx$$

ثم ننقل التكامل الذي في الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر ونجمعه مع التكامل في الطرف الأيسر نحصل على

$$2\int e^x\sin x\, dx = e^x\sin x - e^x\cos x + c$$
$$\int e^x\sin x\, dx = \tfrac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + c$$

في المثال أعلاه لقد استخدمنا طريقة التجزئة مرتين في حل التكامل أعلاه وهذا يحتاج إلى وقت وجهد كبير من قبل الطالب .

الطريقة الجدولية:-

هي حالة خاصة من طريقة التجزئة حيث تتضمن استخدام جدول يتكون من حقلين أحدهما يكون للدالة u والحقل الثاني يكون للدالة dv ونستخدم هذه الطريقة عندما يكون التكامل يتكون من حاصل ضرب دالتين إحداهما دالة متعددة حدود نعتبرها u والثانية نعتبرها dv تكون قابلة للتكامل حيث نقوم باشتقاق الدالة u وتكامل الدالة dv عدة مرات ونتوقف عندما تصبح المشتقة للدالة u تساوي صفر ثم نستخدم اسهم مائلة وكل سهم يعني حاصل ضرب الدالتين المرتبطة بالسهم ومجموع هذه الأسهم يكون ناتج التكامل المطلوب.

مثال :- احسب ناتج التكامل $\int x^2e^x\, dx$

الحل :

u	dv
x^2 (+)	e^x
$2x$ (-)	e^x
2 (+)	e^x
0	e^x

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

نلاحظ في المثال السابق انه يمكن حله بالطريقة الجدولية لانه يحتوي على متعددة حدود وهي x^2 والدالة الثانية هي e^x وهي قابلة للتكامل ولكن المثال الثاني في المبحث الأول والذي هو $\int e^x \sin x\, dx$ لا يمكن إيجاد ناتج هذا التكامل باستخدام الجدول في المثال السابق ولكن يمكن حل هذا التكامل باستخدام الطريقة الجدولية المطورة والذي سوف يتم شرحها في المبحث الثالث .

الطريقة الجدولية المطورة :-

تعتمد هذه الطريقة على استخدام جدول متطور لحل جميع التكاملات التي تحل بطريقة التجزئة وهو مماثل للجدول السابق حيث يتكون من حقلين أحدهما يكون للدالة u والآخر يكون للدالة dv وهذا الجدول مستنبط من طريقة التجزئة الاعتيادية حيث نقوم في

كل خطوة باشتقاق الدالة u وتكامل الدالة dv، ويحتوي هذا الجدول على اسهم مائلة وأفقية حيث أن كل سهم مائل هو عبارة عن حاصل ضرب الدالتين التي ترتبط بهذا السهم كما في الجدول المبين في الطريقة الجدولية والسهم الأفقي هو عبارة عن تكامل حاصل ضرب الدالتين المتقابلتين في الجدول والتي ترتبط بهذا السهم ويكون السهم الأفقي دائما في نهاية الجدول ونستخدم هذا السهم عندما يكون حاصل ضرب الدالتين المتقابلتين في الخطوة الواحدة قابلة للتكامل حيث نتوقف ونكامل حاصل ضرب الدالتين المتقابلتين في نهاية الجدول وتكون إشارة الأسهم متباينة حيث تكون إشارة السهم الأول موجبة والسهم الثاني تكون سالبة والسهم الثالث موجبة وهكذا ومجموع ناتج هذه الأسهم هو ناتج التكامل.

مثال :- جد ناتج التكامل $\int \tan^{-1}x\, dx$

الحـــــــــــــل:-

u	dv
$\tan^{-1}x$	1
(+)	
	x
$1/(1+x^2)$ (-)	

$$\int \tan^{-1}x\, dx = x\tan^{-1}x - \int x/(1+x^2)\, dx$$
$$= x\tan^{-1}x - ½\, Ln(1+x^2) + c$$

دائما في بداية الجدول المطور نستخدم السهم المائل ونلاحظ في الجدول أعلاه إن السهم هو عبارة عن حاصل ضرب الدالتين $\tan^{-1}x$، x والسهم الأفقي هو عبارة عن تكامل حاصل ضرب الدالتين x و $1/(1+x^2)$ ونلاحظ أننا توقفنا عند اشتقاق الدالة u مرة واحدة وتكامل الدالة dv مرة واحدة وذلك لان حاصل ضرب الدالتين المتقابلتين وهما x، $1/(1+x^2)$ يكون هو $x/(1+x^2)$ وهي دالة قابلة للتكامل لذلك نتوقف ونستخدم السهم الأفقي الذي يربط هاتين الدالتين ثم نقوم بجمع ناتج السهمين في الجدول ويكون هو ناتج التكامل مع مراعاة إشارة كل سهم .

والان سوف نقوم بحل المثال الثاني في المبحث الأول باستخدام هذا الجدول.

مثال :- جد ناتج التكامل $\int e^x \sin x\, dx$

الحـــــــــل:-

u	dv
sinx (+)	e^x
cosx	e^x
(-)	e^x
- sinx	
(+)	

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx$$
$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$
$$\int e^x \sin x\, dx = ½(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$$

في التكامل أعلاه فإننا توقفنا بعد اشتقاق الدالة u وتكامل الدالة dv مرتين وذلك لانه سوف تظهر نفس الدالتين الأصلية (الأولى)في الجدول وبغض النظر إلى الإشارة لكل دالة ،وبذلك نستخدم السهم الأفقي في نهاية الجدول لانه سوف يظهر نفس التكامل الأصلي وهو $\int e^x \sin x\, dx$ ثم ننقل هذا التكامل إلى الطرف الأيسر ونجمعه مع التكامل الموجود في الطرف الأيسر ونقسمه على 2 ويظهر الناتج .ونتبع نفس الأسلوب في حل كل التكاملات من النوع $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ أو $\int e^{ax} \cos bx\, dx$

حيث في مثل هذه التكاملات دائما نقوم بخطوتين فقط في الجدول المطور أي نقوم باشتقاق الدالة u مرتين وتكامل الدالة dv مرتين لأنها سوف تظهر نفس الدالتين الأصلية (الأولى) في الجدول وبغض النظر إلى معاملات الدالتين الأصلية وفي هذا النوع من التكاملات يمكن اختيار $u=e^{ax}$ و $dv=\sin bx$ أو بالعكس أي تكون $u=\sin bx$ و $dv= e^{ax}$ ففي كلا الحالتين يمكن إيجاد ناتج التكامل.

ومن ميزات الجدول فإننا في كل خطوة من هذا الجدول نستطيع أن ننقل من طرف إلى آخر عندما

يكون تكامل الدالة dv غير ممكن أو اشتقاق الدالة u يؤدي إلى تعقيد المسألة ونستطيع نقل جزء أو كل الدالة u التـي فـي الجانب الأيسر إلى الدالة المقابلة لها في الجانـب الأيمـن وبـالعكس ، وعـند النقل فأن الجزء المـنقول سـوف يـضرب بالدالة المنقول إليها ثم تُعاد صياغة الخطوة بعد النقل ، وعند نقل الدالة كلها كاملةً فسوف يبقى مكانها واحد في الخطوة بعد النقل ثم نقول باشـتقاق الدالة u من جديد ونكامل الدالة dv من جديد حتـى نصل إلى ناتج ويستخدم هذا النقل لتسهيل تكامل الدالة dv أو لتبسيط الاشتقاق الدالة u .

مثال :- جد ناتج التكامل $\int (Lx)^2dx$

الحـــــــــــــــل:-

u	dv
$(\ln x)^2$ (+)	1
$(2\ln)/x$	x
ننقل x الى الطرف الايسر	
2lnx	1
(-)	x
2/x (+)	

$\int (Lx)^2dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + \int 2dx$
$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

نلاحـظ أنـنا قمنا بنقل الدالة x في الخطوة الثانية إلى الدالة (x)/ (2lnx) التي تقابلها في الجانب الأيسر وذلك لتبسيط اشتقاق الدالة u وكذلك تكامل الدالة dv في هذه الخطـوة وعـند النقل تضرب الدالة x بالدالة 2lnx/x ويبقى مكان الدالة x واحد وتعاد كتابة الخطوة بعد النقل ونقـوم باشتقاق الدالة uونكامل الدالة dvمن جديد أما إشـارة الأسـهم فإنها تكون متناوبة وبغض النظر عن النقل أو التحويل في الدوال .

مثال :- جد ناتج التكامل $\int \sin(\ln x)\,dx$

الحـــــــــل:-

u	dv
Sin(lnx) (+)	1
Cos(lnx)/x	x
ننقل x الى الطرف الايسر	

Cos(lnx)	1
(-)	x
-sin(lnx)/x	
(+)	

$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$

$\int \sin(\ln x)dx = 1/2(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)) + c$

استـخدام الطـريقة الجدولـية المطـورة فـي حل التكاملات التي تحل بالطرق الأخرى

حـيث يمكن استخدام الجدول المطور في حل تكاملات الدوال المثلثية وحسب الحالات التالية :-

الحالــة الأولــى :-إذا كــان الـتكامل مــن الـنوع $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ حـيث ان m,n عـددان فرديان موجـبان أو أحـدهما فـردي موجب والآخر زوجي والأمثلة التالية توضح ذلك .

مثال:- احسب قيمة التكامل $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$

الحل:-

u	dv
Sin^2x (+)	$\mathrm{Cos}^2x \sin x$
2sinx cosx (-)	$-(\cos^3x)/3$

$\int \sin^3x \cos^2x\,dx = -1/3 \cos^3x \sin^2x + 2/3\int \cos^4x \sin x\,dx$

$\int \sin^3x \cos^2x\,dx = -1/3 \cos^3x \sin^2x - 2/15 \cos^5x + c$

مثال:- جد ناتج التكامل $\int \sin^3x\cos^3x\,dx$

الحل:-

u	dv
Sin^2x (+)	$\mathrm{Cos}^3x \sin x$
2sinx cosx (-)	$-(\cos^4x)/4$

$\int \sin^3x\cos^3x\,dx = -1/4 \sin^2x \cos^4x + 2/4\int \cos^5x \sin x\,dx$

$\int \sin^3x\cos^3x\,dx = -1/4 \sin^2x \cos^4x - 1/12 \cos^6x + c$

الحالة الثانية:- إذا كان التكامل دالة مثلثية sinx أو cosx مـرفوعة إلى قوة فردية موجبة والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال :- جد ناتج التكامل $\int \sin^3x\,dx$

الحل:-

u	dv
$\sin^2 x$ (+)	$\sin x$
$2\sin x \cos x$ (-)	$-\cos x$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\sin^2 x \cos x + 2\int \cos^2 x \sin x\,dx$$
$$= -\sin^2 x \cos x - 2/3 \cos^3 x + c$$

الحالة الثالثة:-

إذا كان التكامل من النوع $\int \sin ax \sin bx\,dx$ أو من النوع $\int \cos ax \cos bx\,dx$ أو التكامل من النوع $\int \cos ax \sin bx\,dx$

والمثال التالي يوضح ذلك

مثال :- جد ناتج التكامل $\int \sin x \sin 3x\,dx$

الحل:-

u	dv
$\sin 3x$ (+)	$\sin x$
$3\cos 3x$ (-)	$-\cos x$
$-9\sin 3x$ (+)	$-\sin x$

$$\int \sin x \sin 3x\,dx = -\sin 3x \cos x + 3\cos 3x \sin x + 9\int \sin x \sin 3x\,dx$$
$$-8\int \sin x \sin 3x\,dx = -\sin 3x \cos x + 3\cos 3x \sin x + c$$
$$\int \sin x \sin 3x\,dx = 1/8 \sin 3x \cos x - 3/8 \cos 3x \sin x + c$$

الحالة الرابعة:- إذا كان التكامل من النوع $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ حيث ان m,n كلاهما عددان فرديان موجبان أو كلاهما عددان زوجيان أو n عدد زوجي موجب و m عدد حقيقي عدا (الأعداد الفردية السالبة) وأمثلة التالية توضح ذلك .

مثال:- جد ناتج التكامل $\int \tan^4 x \sec^4 x\,dx$

الحل :-

u	dv
$\sec^2 x$ (+)	$\tan^4 x \sec^2 x$
$2\sec^2 x \tan x$ (-)	$1/5 \tan^5 x$

$$\int \tan^4 x \sec^4 x\,dx = 1/5 \tan^5 x \sec^2 x - 2/5 \int \tan^6 x \sec^2 x\,dx$$

$$\int \tan^4 x \sec^4 x\,dx = 1/5 \tan^5 x \sec^2 x - 2/35 \tan^7 x + c$$

مثال:- جد ناتج التكامل $\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$

الحل:-

u	dv
$\tan^2 x$ (+)	$\sec^2 x \sec x \tan x$
$2\tan x \sec^2 x$ (-)	$1/3 \sec^3 x$

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx = 1/3 \tan^2 x \sec^3 x - 2/3 \int \sec^4 x \sec x \tan x\,dx$$
$$\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx = 1/3 \tan^2 x \sec^3 x - 2/15 \sec^5 x + c$$

مثال :- جد ناتج التكامل $\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx$

الحل :-

u	dv
$\sec^2 x$ (+)	$\tan^3 x \sec^2 x$
$2\sec^2 x \tan x$ (-)	$1/4 \tan^4 x$

$$\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx = 1/2 \tan^4 x \sec^2 x - ½ \int \tan^5 x \sec^2 x\,dx$$

$$\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx = 1/2 \tan^4 x \sec^2 x - 1/12 \tan^6 x + c$$

الحالة الخامسة :-

إذا كان التكامل من النوع $\int \csc^n x \cot^m x\,dx$ فان طريقة حل هذا النوع من التكاملات يكون مماثل للحالة الرابعة كما في المثال .

مثال:- جد ناتج التكامل $\int \csc^4 x \cot^4 x\,dx$

الحل :-

u	dv
$\csc^2 x$ (+)	$\cot^4 x \csc^2 x$
$-2\csc^2 x \cot x$ (-)	$-1/5 \cot^5 x$

$$\int \csc^4 x \cot^4 x\,dx = -1/5 \cot^5 x \csc^2 x - 2/5 \int \cot^6 x \csc^2 x\,dx$$
$$\int \csc^4 x \cot^4 x\,dx = -1/5 \cot^5 x \csc^2 x + 2/35 \cot^7 x + c$$

المصادر

1- نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل ، الدكتور فرانك ايرز ،دار ماكجروهيل للنشر ، الطبعة الثانية ،1988 .

2- حسبان التفاضل والتكامل مع الهندسة التحليلية ، اى . جى . برسل ، الطبعة الثانية ، 1983 .

[3] calculas by thomas 7th edition.

THE DEVELOPED TABULATED METHED FOR EVALUATING INTEGRALS

FIRAS SHAKER FINDY

E.mail: Firas78_sh@yahoo.com

ABSTRACT :In this search we had made a developed table to solve all integrals which can be solved by parts as well as other integrals which solved by anther methoed ,this table is ashort method to solve such integrals with less effort and time as well as reduction the percentage of error in the results.the 1st chapter of the search contain explain the ordinary method of integration by parts & how to evaluate the integrals. The 2nd chapter explain the tabulated method & the evaluation of integrals for function consist of " two functions multiplaction" one of them polynomial the 3rd chapter contian the developed tabulated method & how to applicate it an all integrals which soved by parts by using the developed table . the table is simple and have a ccurate results. The foarth chapter contain using the developed table to evaluate the driangnometric functions integral which easier and faster from the ordinary integration method .